

Le cheminement de votre pensée doit être apparent (autrement dit : il faut justifier ses réponses ;). Le barème est donné à titre indicatif, et des points seront attribués pour la présentation et la rédaction de la copie ; En particulier, mettez vos résultats en valeur, par exemple en les soulignant d'une autre couleur ou en les encadrant. Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont potentiellement plus difficiles ou plus longs que les autres.

Les calculatrices et documents de tout type sont interdits.

Exercice 1 (4 pts). Questions de cours

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Donner, si elle existe, l'expression de A^{-1} .
2. Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Donner une formule permettant de calculer l'inverse de AB , et la démontrer.
3. Soient $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une autre base de $\mathbb{R}^n$. Expliquer ce qu'est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, que l'on notera $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, puis expliquer ce que représente l'inverse de cette matrice.

Application : soit le vecteur $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et soit la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exprimer les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$.

4. Soit E un espace-vectoriel. Donner 3 critères nécessaires et suffisants pour qu'un ensemble F soit un sous-espace vectoriel de E . On accompagnera chacun des critères d'une phrase explicative.

Dès lors que l'on aura donné ces définitions, on pourra se contenter d'y faire référence lors des exercices ultérieurs, si nécessaire.

Exercice 2 (5 pts). Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, où a est un paramètre réel.

1. Déterminer les valeurs possibles de a pour que la matrice M soit de rang 3.

On considère à présent que dans tout le reste de l'exercice, $a = 2$.

2. La matrice M est-elle inversible ?
3. Trouver deux réels α et β tels que $M^2 = \alpha M + \beta I_3$.
4. Exprimer alors M^{-1} en fonction de M et I_3 , puis écrire explicitement son expression.
5. Résoudre enfin le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x + y + 2z &= 3 \end{cases}$$

Exercice 3 (6 pts). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner l'expression de P , la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers la base $\mathcal{B} = ((1, -1), (1, 1))$, puis calculer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. En déduire une expression de A^n .

On considère à présent deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \end{cases},$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. On définit aussi le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

4. Etablir une relation de récurrence portant sur X_n , puis en déduire une expression explicite de X_n en fonction de X_0 .
5. Déterminer alors la limite des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 4 (4 points). Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - y = 1\}$.
2. $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$.

Exercice 5 (4 pts). On considère l'ensemble suivant :

$$E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | {}^tMM = M{}^tM\},$$

où $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ représente l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels, et où tM représente la transposée de la matrice M . On définit également les matrices suivantes : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. A et C appartiennent-elles à E ?
2. $A + C$ appartient-elle à E ? En déduire si E est un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou non.
3. (*) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n \in E$.
4. (*) Déterminer les deux formes de matrices pouvant appartenir à E .

Exercice 6 (Bonus). La consigne de la question bonus est écrite ci-dessous en blanc sur fond blanc. J'espère qu'elle te plaira, et t'inspirera.